Clase 13.

Bases y dimension en R"

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

sgéttttt4e *base* para un subespacio S de R" es un conjunto de vectores en

**Definición** S que

1. genera S y 2. es linealmente independiente.

shkente independiente

Ejemplos.

(1) e=10 y el forman una base para Ry

by *m*an und

**e par**

1

ya

que:

© gen{8:0}={+3+39=3=R\* \*YER}=R ou Ga Son linealmente independientes

L

(2) e---- 1. en

=

y en =

... 00

I forman una

comman una

que:

base para R", ya

\* Jenkes..., e*ny*=

=

X

XnHE

ER": X1..., XnERR".

o

OO.

son linea*l* independientes, ya que

*0*

Go +...+ C :

.

*GS*...

*00*...0

(2 = 0

U

0

por lo tanto, la rénica combinacion lineal de en,...., en que da ce es la combinación linea trivial, lo cual muestra que enge., en son lineal/ independientes.

(3) si u=2 y v=[1] , entonces {u, v)

forman una base para R, ya que

© gent et 3} = {G=<$CRPC,GER}

:C,CERI

aq.

# *x*p

-

-

-

-

-

-

-

-

r13

y 1 (-1) R21 3 y Lo -5 x-zy\_ [° 1 -+zy

1 31 y 7 R2-3R2 rio 3x-23 Lo 11-x+2y L 1-x+2y Así, notamos que para todo existen C1, C2 ER tal que:

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-

C2=-33 +39

Así, tenemos que R=gen 3-

o

y

son lineal) independ*i*entes

Conclusion: El análisis anterior muestra que forman una base para R?

w

Ejemplo 3.44

Encuentre una base para S = gen(u, v, w), donde

u

=

1), v

=

**y**

**W**

**=**

5

Solución Notemos inicial que:

S=gen(u,v,w) =

y = 0,37

auw!

+ C, 2+co.

1:4,5,GzER

\_

L

Z

Ahora, para determinar una base para

S es necesario encontrar una coleccion de vectores que generen as y que sean lineal independientes De esta manera, podemos notar que:

(1) u,vw generan a S pero no sabe mos si sono lineal, independientes, (2) una manera de encontrar una base

para sa partir de u,v y w está dado en el siguiente algoritmo.

Algoritmo. Si Uo... Um son vectores columna en IR y Sagen (U13..., Um) entonces para encontrar una base para realizamos los s*i*guientes

pasos:

paso*(*1): trasponer *l*os *v*ectores U1, ..., Um

y formar una matriz con estos vectores. paso(2): Si A es la matriz obtenida en el 'Paso (1), entonces aplicamos operaciones elementales por renglon para llevar a *A* a una matriz escalonada *A.* Paso(3): S; Aesla matriz obtenida del paso (2) y V1, V2*, .*.., VK son los renglones no nulos de A, entonces

N*', VI,...,VT* generan as

Así, aplicaremos el algoritmo anterior para

determinar una base para s

Paso(1); transponer los vectores UV y w

y formar una matriz con estos vectores u= 3 = [3 -15]

All

=[213] \_\_

3 -1 5 A= 2 13

Loos 1

WE*L*T=[0-51]

Paso(2): Encontrar la forma escalonada

de A.

**ma e BC**

**a**

1 -1/

| 3

2

#=Z S

جار

5/3

-1 1

A

=

itwa

1 -13 53 2 1 3

0 -5 1

1

o 0

5/3 - V -5 1

*no*

o var

Son

paso (3): Si À es la matriz obtenida del

paso (2) y Vlg..., Vk son los renglones honulos de A, entonces VIT, ....UK forman una base para s. V1= [1 -V: 5/5]

VT=ş y *VI=* i

**ON**

-

---

--

--

--

forman una base para s.

--

V2= [0 1 -15]

---

--

-

Ejemplo 3.45

Encuentre una base para el espacio renglón de

[ 1 1 3 1

2 -1 0 1 *A* =

| -3 2 1 -2 L 4 1 6 1

6 - 1

1 3

Solución:

-

-

-

-

-

-

-

*P*ara hallar una base para el espacio renglon de A, recor*d*emos el siguiente teorema:

Teorema,

Sea A una matriz de tamaño man y suponga mos que A se obtiene *d*e A realizando operacio nes elementales por renglón, entonces:

© Renglon(A) = Renglón (#"). o si À es la forma escalonada de A entonces los renglones no nulos de A forman una base para Renglón (A).

Por lo tanto, para determinar una base para A, encontremos la forma escalo*n*ada de A.

A

1 13 16 | R2-2 R1 11 31 6 A=

2 -1 0 1 -1 R3+3Ryo -3 -6 -1 -13 1-3 2 1 -2 1

lo 5 10 R4-4R1

1 19 | 4 *1 6* 1 3

-3 -6 -3 -2)

1 1 31 6 0 -3 -6 -1 -13 o 5 10 1 19 0 -3 -6 -3 -21

(1) R4

1 0 0 0

1 -3 5 1

3 1 6 -6 -1 -13 10 1 19 2 1 →

1

1 -3 5 1

-6-1-1

10 1 2 1 7

1 1 3 1 6 o 121 o 5 10 1 19 lo-3 -6-1-13

0

1000 - 1000

00-

3 1 *6*

R3-5R2 2 1 7 Ry

R4+3R2 10 1 19 -6 -1 -13

*1*

1

oo Nw

lotto

*I*N

1 1 3 1 6

o 1 2 1 7 (-1 O O O -4 -16 ooo 28

000-7

*0 0* --

1 1

3 2

Oo o

| 1 1 3 1 6

1 1 *3* 1 6 o 1 2 1 7 | Ru-2 R3o 1 2 1 7 0 0 0 1 4

| 0 0 0 14 Oo o 28

Tort + 00 Tort *+ 0*

O 05

\_r*oo*

oonw

do

1 0

1 1

*3* 1 2 1

*itto!*

Esta matriz es escalonada

es escalonada

-reducida*)*

**no e**

o Oo oo

por lo tanto, tenemos que una base para Renglón (A) son los vectores [ 131 ] [ 1 2 1 7] [ 0 0 1 4

Observación ( bases para col(A)).

(1) El siguiente es un algoritmo para determinar una base para colla),

Algoritmo. sea A = Co... Cn una matriz de tamaño mxn con columnas Cly.--, Cn. Entonces

para determinar una base para col(A) procedemos de la siguiente manera: Daso(1): Hallar AT y una forma es calonada B de AT. paso (2): Hallar BT. Paso(3), las columnas no nulas de BT formarán una base para col(A).

(2) El siguien**te teorema nos ofrece una** manera alternativa de estudiar col(A)

Usando las formas escalonadas de A.

Teorema supongamos que A[a .... Ch] es una matriz de tamaño mxn con columnas

Cage...,cn y sea A=[Di... Dn una matriz que se obtiene de A aplicando operaciones elementales por renglon. si Cin, Ciz...,Cik son algunas columnas

de A, entonces: ♡ Cins... Cik son L.I = *D*ing..., Dikson LI.

Cinger., Cik son una base para Col(A)

Ding..., Dik son una base para COICA)

En el siguiente ejemplo se explora un poco este teorema y su aplicabi

lidad.

***3***

Ejemplo. Encontrar una base para col (A) con

S c, G C3 C4 C5

11 1 3 1 6 A= 2 -1 0 1 -1

|-3 2 1 -2 1

4 1 6 1 3 Solución En el ejemplo anterior, hemos visto

que una forma escalonada para A és

. Dr D2 D3 D4 Ds

1 1 3 1 6 Ao i 2 Į Ž

err*ol*

oon, wo

0++

Entonces De , Dz y D4 forman una base para colcA). por lo tanto,

una base para colCA) es ci, Cz y C4.

Col(A)= gen{ 41,C2,C3,C4,Csy

= gen{ci, Cz, cu}